

Diszkrét és folytonos:  
a gráfelmélet, algebra, analízis és geometria  
találkozási pontjai  
(OTKA NK 67867) zárójelentés

Lovász László

July 1, 2010

Sok eredmény született a gráfok növekvő sorozataival és azok limeszobjektumaival, ill. az ezek vizsgálatára szolgáló gráf-algebrákkal kapcsolatban. Lovász László kidolgozta a nagyon nagy sűrű gráfok (hálózatok) matematikai elméletének alapjait, amiről a Harvard egyetemen tartott előadás-sorozatot, ill. publikált összefoglaló cikket. Ennek alapján Lippner Gábort meghívták a Harvard-ra postdoc-nak az elmélet részletesebb ismertetésére.

Lovász és Szakács László kiterjesztették gráflimeszek elméletét a multigráfokra, Lovász és Szegedy Balázs pedig kompakt térből dekorált gráfokra. Lovász és Vesztegombi Katalin (C. Borgs, J. Chayes és T. Sós Vera társszerzőkkel) véletlen lokális szabály szerint növekedő gráfsorozat limeszét vizsgálta, és számos konkrét sorozatra meghatározta a limeszt 2 ill. 4 változós mérhető függvény formájában, és olyant is talált, melyet nem egy grafon, hanem egy grafonokon értelmezett valószínűségeloszlás ír le. Szakács meghatározta a sűrű "sznob" szabály szerint növekvő gráfok sorozatának limeszét.

A gráflimeszek elméletének az extrémális gráfelmélet területén születtek alkalmazásai. Lovász és Szegedy extrémális gráfok limeszeinek jellemzését kezdeményezték. Megmutatták, hogy ezek első kategóriájú halmazt alkotnak az összes limeszobjektumon belül, és leírtak több nem-standard extrémális-gráf típust. Egy másik dolgozatban Lovász és Szegedy megmutatták, hogy minden részgráf-sűrűségekre vonatkozó algebrai egyenlőtlenség tetszőleges pontossággal bebizonyítható négyzetösszegként való reprezentációval.

Igen szoros együttműködés alakult ki a Rényi Intézettel, a gráflimeszek témájában tartott közös szemináriumokon. Lippner és Elek Gábor korlátos fokú gráfok limeszobjektumait vizsgálták, ezekre a Regularitási Lemma bizonyos analogonjait bizonyították. Korlátos fokú gráfokra belátták, hogy a maximális párosítás relatív mérete tesztelhető paraméter.

A hálózatok struktúrájának feltárása után a következő lépés a hálózatokon zajló folyamatok analízise. Sikolya Eszter hálózati folyamatok kontrollálhatóságával foglalkozott, és sikerült egy Kálmán-féle kritériumhoz

hasonló feltételt találni egy gráf egy csúcspontban való maximális kontrollálhatóságára, és a jelenség funcionálanalízisbeli hátterét mélyebben megvilágítani.

A nagy hálózatok vizsgálatának gyakorlati oldalát képviselte Grolmusz Vince és az általa irányított PIT Csoport (Iván Gábor, Szabadka Zoltán és Ördög Rafael) fehérje-fehérje interakciós hálózatokkal, a fehérjéken található kismolekula-kötőhelyek elemzésével kapcsolatos munkája. Új fehérje-fehérje interakciós hálózatelemző eszközöket kifejlesztésében értek el eredményeket. Adaptálták a Google által is használt PageRank és perszonalizált PageRank algoritmusokat erre a problémára, valamint foksám-eloszlások vizsgálatának módszerét. Vizsgálták a *Mycobacterium tuberculosis* metabolikus és fizikai interakciós fehérje hálózatát. A fontosabb paramétereket vizualizálták, és illesztették az MTB-beli aminosav szekvenciákat a humán aminosav szekvenciákkal. A fehérjék Delaunay felbontásainak statisztikai tulajdonságait tanulmányozták, és rávilágítottak a térfogat/szabályosság és a fehérje tér szerkezet bizonyos tulajdonságai közötti összefüggésekre. Fejlesztés alatt áll továbbá egy a PDB-ben található hibák javítását célzó tudósokból álló közösség szerveződését segítő webes alkalmazás. Grolmusz Vince az IEEE Transactions on Information Theory-ban megjelent cikkében egy hipersűrű kódolást írt le.

A gráfelmélet topológiai vonatkozásaival többen foglalkoztak a projekten belül. Király Tamás és Pap Júlia gráfok kernel-megoldhatóságára vonatkozó elégséges feltételeket adtak, és megfogalmaztak egy sejtést szükséges és elégséges feltételre  $h$ -perfekt gráfokban. Azt vizsgálták, hogy Boros és Gurvich tétele irányított perfekt gráfok kerneleiről hogyan terjeszthető ki más gráfosztályokra. Scarf Lemmájának felhasználásával megadtak egy kiterjesztést, ahol a kernel létezésének feltétele a stabil halmazok poliéderjének lapjaitól függ. Ezenkívül megmutatták, hogy a bizonyításban a játékelméleti Scarf Lemma kiváltható a topológiai Sperner Lemma egy poliéderes változatával. Egy másirányú kapcsolatot jelent a csomók elmélete. Vértesi Vera és Stipsits András klasszifikálták a csavart csomók Legendre-reprezentánsait; Vértesi (Etnyre és Ng társszerzőkkel) Legendre-féle and transverzális csavart csomók tulajdonságait vizsgálta. Laczkovich Miklós Daróczy Zoltánnal írt cikkében belátta, hogy az egyik ún. Matkowski-Suto típusú függvényegyenletnek csak konstans megoldásai vannak.

A gráfelmélet geometriai kapcsolatai közül az egyik legfontosabb a szerkezetek merevségének elmélete. Jordán Tibor és B. Jackson új részeredményeket ért el a Tay és Whiteley által megfogalmazott "Molekuláris Sejtés"-sel kapcsolatban, többek között igazolta annak 2-dimenziós változatát. Hatékony kombinatorikus algoritmust adtak arra, hogyan helyettesíthetők egy síkbeli redundánsan merev generikus rúd-csukló szerkezetben a rudak kötelekkel és rugókkal a merev realizáció megtartásával. Tovább javították Lovasz és Yemini eredményét 6-összefüggő gráfok generikus merevségéről.

A diszkrét geometria a diszkrét matematika és geometria fontos hátérterülete. Bezdek Károly és A. Litwak (konstanstól eltekintve) bebizonyították Bang egy hengerekkel való fedésekre vonatkozó régi sejtését, becslést adtak az analóg magasabb dimenziós problémára, és vizsgálták a

Tarski sávfedési probléma analogonját konvex testek rácspontjainak fedéseire vonatkozólag. Kiss, Bezdek és Csikós a klasszikus megvilágítási probléma néhány általánosításával foglalkoztak. Bebizonyítottuk a "röntgenszám-sejtést" állandó szélességű testekre 3,4,5 és 6 dimenzióban, és meghatározták a szabályos testek megvilágítási paramétereit. Csikós Balázs és ifj. Böröczky Károly bebizonyították Fejes-Tóth László momentumtételének egy új változatát, melyben az integrandus nem a második momentumtól, hanem egy másik kvadratikussal alakított függ.

A véges geometriák a diszkrét matematika és geometria további fontos határterületét alkotják, ahol sok eredmény született. Gács András és Héger Tamás klasszikus általánosított sokszögekkel konstrukciókat adtak  $(k,g)$ -gráfokra, bizonyos esetekben megjavítva a korábbi becsléseket cage-ek méretéről. Gács András és Tim Alderson megmutatta, hogy ha egy lineáris kód kiterjeszthető, akkor lineáris kiterjesztés is van. Gács András és Simeon Ball véges test feletti polinomok dupla hatványösszegeivel kapcsolatban ért el algebrai eredményeket. A vizsgálatot a véges affin sík irányproblémájára korábban született eredmények bizonyítási módszere motiválta. Szőnyi Tamás több dolgozatban, társszerzőkkel Jamison és Brouwer-Schrijver affin terek hipersíkjainak lefoglalására vonatkozó klasszikus tételének duálisát vizsgálta többféle geometriai struktúrában, algebrai módszerekkel. Kiss György szemioválisokkal kapcsolatban bizonyított több karakterizációs, valamint nemlétezési tételt, és alacsony rendű síkokon meghatározta a szemioválisok méretének spektrumát. Szőnyi Tamás Blokhuis-szal és Brouwer-rel a Hilton-Milner tétel vektorterekre vonatkozó  $q$ -analógját találták. Weiner Zsuzsával folytatták a lefogó pontthalmazok stabilitásával kapcsolatos vizsgálataikat: Harrach Nórával és Metsch-csel belátták, hogy megfelelő feltételek minden kis lefogópontthalmaz lineáris. Gács Andrásal közösen sikerült a projektív geometria-kódok kis súlyú kódszavait karakterizálniuk. Weiner, Gács és Héger Tamással kis  $(k,6)$ -gráfok Brown-féle konstrukcióról bebizonyították, hogy bizonyos feltételek mellett ezek optimálisak. Sziklai Péter (többekkel)  $n \times n$ -es mátrixok részmátrixokból való rekonstruálhatóságára bizonyított közel éles eredményt, és a  $q$  elemű test feletti  $n$  dimenziós projektív tér altereinek karakterisztikus vektorai által generált lineáris kód kódszavai súlyának lehetséges értékeire határozott meg egy "tiltott intervallum"-ot. Csikós Balázs, Kiss György, Swanepoel és de Wet antipodális kollekciók méretére bizonyítottak felső korlátokat.

A kombinatorika és számelmélet határterületén Károlyi Gyula a külső algebrai módszerrel új strukturális eredményt nyert az Erdős-Heilbronn problémával kapcsolatban. A polinom módszerrel egyszerűbb bizonyítást talált Dias da Silva és Godinho néhány eredményére. Tóth Gézával közösen az Erdős-Hajnal probléma 'order type'-okra vonatkozó megfelelőjével kapcsolatban érték el új eredményeket. Károlyi a polinom módszer segítségével lineáris felső becslést adott egy nilpotens csoportokkapcsolatos additív kombinatorikai problémára.

A diszkrét matematika, számítástudomány és algebra kapcsolatait vizsgálták Szabó Csaba és tanítványai. Szabó és Pluhár Gabriella a teljesen reguláris félcsoport varietások szabad spektrumáról és a fenti varietások hálójának szerkezetéről ért el meglepő eredményeket. Horváth Eszter, Horváth Gábor,

Németh Zoltán, Szabó Csaba erős becsléseket adtak a négyzet alakú szigetek maximális számára két és több dimenzióban. Szabó, Pluhár és Kátai Kamilla félcsoporthvarietások szabadspektrumát vizsgálták. Kátai, Szabó becslést adtak az összes olyan varietás szabad spektrumára, amit kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoporthok generálnak. Pluhár meghatározta a szabad algebra méretének logaritmusát a köteg varietásokban. Pluhár, Horváth és Németh a "szigetek számára" vonatkozó gráfelméleti problémában ért el új eredményeket. Kun Gábor és Szegedy Márió a Constraint Satisfaction Problem dichotómia sejtés egy ekvivalens formáját adják analitikus nyelven, és jellemzik azokat a dinamikai rendszereket, melyek néhány koordináta megváltoztatására stabilak. Kun és Larose kiterjesztették Lovász és Greenwell egy teljes gráfok hatványainak színezésére vonatkozó korábbi eredményét a hatvány minden, a koordináták és a teljes gráfok csúcsainak permutációjára invariáns részgráfjára.

Gráf-algoritmusok elméleti és gyakorlati kérdéseiről több eredmény született. Király Zoltán és Szabó Jácint az egyik legáltalánosabb jól karakterizálható pakolási feladatra, a propeller-családok feszített pakolásaira adtak Tutte-Berge és Gallai-Edmonds típusú tételeket. Király Zoltán bebizonyította, hogy két  $n$  csúcsú fa uniójában csak  $(2 - \epsilon)^n$  kör lehet. Károlyi Gyula és Rosta Vera megjavították a páratlan körök Ramsey multipllicitására vonatkozó 30 éves eredményeket. Kiemelendő eredmény Király Zoltán két APX-nehéz feladatra adott, az eddigieknél lényegesen jobb és egyszerűbb közelítő algoritmus, mely az ESA 2008 konferencián a "Best Paper Award" díjat nyerte el.